ENTARTUNG

Betrachten wir folgendes LOP:

Max $x0 = 3\,x1 + x2$

u.d.N.

$$
\begin{aligned}
x1 + 3\,x2 &\le 15\\
x1 + 2\,x2 &\le 11\\
3\,x1 + x2 &\le 18
\end{aligned}
$$

NNB $x1, x2 \ge 0$

Einfügen der Schlupfvariablen liefert

Max $x0$

u.d.N.

$$
\begin{aligned}
x0 - 3\,x1 - x2 \qquad\qquad &= 0\\
x1 + 3\,x2 + s1 \qquad\quad &= 15\\
x1 + 2\,x2 \quad + s2 \quad &= 11\\
3\,x1 + x2 \qquad\quad + s3 &= 18
\end{aligned}
$$

NNB $x1, x2, s1, s2, s3 \ge 0$

Damit erhalten wir das folgende

TABLEAU I

x0	x1	x2	s1	s2	s3	RS
1	-3	-1	0	0	0	0
0	1	3	1	0	0	15
0	1	2	0	1	0	11
0	3	1	0	0	1	18

1. Schritt: Pivotspalte = Spalte x1

2. Schritt: Bilde Quotienten aus rechter Seite und Pivotspaltenelement, also

TABLEAU I

PS

x0	x1	x2	s1	s2	s3	RS	Quotient	
1	-3	-1	0	0	0	0		
0	1	3	1	0	0	15	15 : 1 = 15	
0	1	2	0	1	0	11	11 : 1 = 11	
0	3	1	0	0	1	18	18 : 3 = 6	PZ

Damit ist die 4. Zeile die Pivotzeile. Dividiert man diese Pivotzeile durch das Pivotelement 3, so erhält man das Hilfstableau:

HILFSTABLEAU

x0	x1	x2	s1	s2	s3	RS
1	-3	-1	0	0	0	0
0	1	3	1	0	0	15
0	1	2	0	1	0	11
0	**1**	1/3	0	0	1/3	6

Addiert man die geeigneten Vielfachen der IV. Zeile zu den Zeilen I bis III, also

HILFSTABLEAU

x0	x1	x2	s1	s2	s3	RS	
1	-3	-1	0	0	0	0	I + 3 IV
0	1	3	1	0	0	15	II - IV
0	1	2	0	1	0	11	III - IV
0	**1**	1/3	0	0	1/3	6	

so erhält man

TABLEAU II

x0	x1	x2	s1	s2	s3	RS
1	0	0	0	0	1	18
0	0	8/3	1	0	-1/3	9
0	0	5/3	0	1	-1/3	5
0	1	1/3	0	0	1/3	6

Markieren wir die Basis- bzw. Nicht-Basisvariablen:

TABLEAU II

x0	x1	x2	s1	s2	s3	RS
1	0	0	0	0	1	18
0	0	8/3	1	0	-1/3	9
0	0	5/3	0	1	-1/3	5
0	1	1/3	0	0	1/3	6
	BV	NBV	BV	BV	NBV	

Hieraus lesen wir die optimale Lösung ab:

(x0 | x1, x2, s1, s2, s3) =
(18 | 6 , 0 , 9 , 5 , 0)

So weit, so gut.

Betrachten wir noch einmal die Zielfunktionszeile im TABLEAU II.

x0	x1	x2	s1	s2	s3	RS
1	0	0	0	0	1	18
	BV	NBV	BV	BV	NBV	

Wir stellen fest, dass die Werte der Zielfunktionszeile bei den BV immer Null ist.
Warum?

Betrachten wir nun die NBV, dann stellen wir fest, dass der Zielfunktionswert bei s1 gleich 1, also positiv ist.

Was bedeutet dies?

Würde s3 in die Basis aufgenommen (also „produziert“), so verändert sich der Zielfunktionswert (der Wert unter „RS“, hier die 18) je „produzierter“ Mengeneinheit von s3 um 1, aber in die falsche Richtung – der Zielfunktionswert SINKT.

Anders ist es bei der NBV x2.
Hier haben wir den zugehörigen Wert in der Zielfunktion gleich 0.

Wenn wir nun Produkt 2 herstellen, also x2 in die Basis aufnehmen, ändert sich der Zielfunktionswert um 0 je hergestellte Mengeneinheit, also gar nicht.

Gehen wir nochmals von Tableau II aus und wählen die x2-Spalte als Pivotspalte, dann erhalten wir

TABLEAU II

x0	x1	x2 (PS)	s1	s2	s3	RS
1	0	0	0	0	1	18
0	0	8/3	1	0	-1/3	9
0	0	5/3	0	1	-1/3	5
0	1	1/3	0	0	1/3	6

Nun bilden wir die Quotienten:

TABLEAU II

x0	x1	x2 (PS)	s1	s2	s3	RS	Quotient	
1	0	0	0	0	1	18		
0	0	8/3	1	0	-1/3	9	9 : 8/3 = 9*3 / 8 = 27/8 = 3,375	
0	0	5/3	0	1	-1/3	5	5 : 5/3 = 5*3 / 5 = 15/5 = 3	PZ
0	1	1/3	0	0	1/3	6	6 : 1/3 = 6*3 / 1 = 18	

Dividieren wir nun die III. Zeile durch das Pivotelement 5/3, bzw. multiplizieren wir diese Zeile mit 3/5, so erhalten wir

Hilfstableau

x0	x1	x2	s1	s2	s3	RS
1	0	0	0	0	1	18
0	0	8/3	1	0	-1/3	9
0	0	**1**	0	1	-1/5	1
0	1	1/3	0	0	1/3	6

Addiert man die geeigneten Vielfachen der III. Zeile zu den Zeilen (I), II und IV, also

Hilfstableau

x0	x1	x2	s1	s2	s3	RS	
1	0	0	0	0	1	18	
0	0	8/3	1	0	-1/3	9	II – 8/3 * III
0	0	**1**	0	1	-1/5	1	
0	1	1/3	0	0	1/3	6	IV – 1/3 * III

so erhält man:

TABLEAU IIa

x0	x1	x2	s1	s2	s3	RS
1	0	0	0	0	1	18
0	0	0	1	8/5	1/5	1
0	0	1	0	3/5	-1/5	3
0	1	0	0	-1/5	2/5	5
	BV	BV	BV	NBV	NBV	

Wir haben also eine weitere optimale Lösung:

(x0 | x1, x2, s1, s2, s3) =
(18 | 5 , 3 , 1 , 0 , 0)

Halten wir fest:

Satz:

i) Ist in einer optimalen Lösung eines LOP der Zielfunktionswert einer Nicht-Basisvariablen gleich Null, so gibt es weitere optimale Lösungen. Diesen Fall nennt man „Entartung“.

ii) Jeder Punkt auf der geradlinigen Verbindung der (beiden) Optimallösungen ist ebenfalls optimal.

Die zweite Aussage des Satzes bedeutet in unserem Fall folgendes:

Basislösung 1:
(x0 | x1, x2, s1, s2, s3) =
(18 | 6 , 0 , 9 , 5 , 0)

Basislösung 2:
(x0 | x1, x2, s1, s2, s3) =
(18 | 5 , 3 , 1 , 0 , 0)

Im 1. Fall lautet die Produktion der beiden Güter: (x1, x2) = (6, 0), im 2. Fall (x1, x2) = (5, 3).

Stellen wir dies graphisch dar:

```
       ^
  x2 !                                  \   <- Zielfunktionsgerade
       !                                 \
     3!                                  X
       !                                   x
     2!                                     x
       !                                      x    <- Kante des erlaubten Bereichs
     1!                                        x
       !                                         x
       -----+------+-----+-----+-----+-----X-----+-→  x1
            1      2     3     4     5     6 \
                                              \
                                               \
```

Alle Punkte (d. h. Produktkombinationen) auf der oben skizzierten Strecke X x x x X
d. h. vom Punkte (6, 0) zum Punkt (5, 3) sind ebenfalls optimal.

Der Grund für die Entartung liegt darin begründet, dass die Zielfunktionsgerade und die Begrenzung des erlaubten Bereichs auf dieser Strecke deckungsgleich sind.